

Capítulo

5

Integrais: Conceitos e Técnicas

Objetivos Deste Capítulo

1. Aprender a aproximar a área de figuras curvas por retângulos
2. Definir uma integral definida
3. Distinguir áreas positivas e negativas
4. Compreender o teorema fundamental do cálculo
5. Encontrar funções que representem integrais indefinidas
6. Identificar a antiderivada como integral indefinida
7. Revisar as variadas fórmulas integrais para funções padrão
8. Saber que descontinuidades podem afetar a validade de fórmulas integrais
9. Aprender técnicas básicas de aplicação de integrais
10. Aplicar técnicas para checar a validade das integrais do Maple

Comandos Do Maple Usados Neste Capítulo

`with(student):` Comando para carregar o pacote `student` (biblioteca). Emita este comando sempre que iniciar uma nova área de trabalho do Maple enquanto estiver neste capítulo.

`cangevar(sqrt(1-x^2)=
u, Int(G, x), u);` Muda a variável da integration de x para u .

`combine(value(S));` O *combine* tenta os termos múltiplos em um único termo.

`expand(ex, trig);` Expande a expressão `ex` usando regras de expansão trigonométrica.

`sxpan(S);` A forma mais simples do comando `expand`

`factor(simplify(sum
(ii, ii = 1 .. n)))` Fatorar uma soma após simplifica-la.

`int(1/(x-3)^2, x = 2 .. 4);` Comando do Maple para integral definida.

`int(1/(x-3)^2, x);` Sintaxe da integral indefinida

`Int(f(x), x = a .. b) =
F(b) – F(a);` Maneira que o Maple escreve o teorema fundamental do cálculo integral.

`Int(f(x), x = a .. b);` Forma inerte do comando de integration.

`Int(q, x) = int(q, x);` As duas formas do comando para integration na mesma sentença.

`intparts(Int(x*Ln(x), x), x);` Comando para aplicar a integration por partes da integral, especificada pela forma inerte do comando *int*.

`isolate(p1, Int(x*Ln(x), x));` Isolar a expressão da integral indefinida no lado esquerdo da equação `p1`.

`lhs((p2) = rhs(p2);` Os comandos para especificar os lados direito e esquerdo da equação `p2`.

`limit(S, n=infinity);` O limite, quando `n` tende ao infinito, da expressão `S`.

`middlebox(x/2, x = 0 .. 5,
10, color=black);` Plota a linha $y = x/2$ e desenha 10 retângulos abaixo da linha entre $x = 0$ e $x = 5$.

`middlesum((x/2, x =
0 .. 5, 10);` Soma as áreas dos retângulos descritos no comando *middlebox*.

`simplify((middlesum
(f(x), x = 0 .. x+x/1000,
1001);` Simplifica a expressão somatória.

`simplify(c, symbolic);` O parâmetro `symbolic` é útil quando existe um radical na expressão `c`.

`sqrt(1 – x^2);` A função de raiz quadrada.

`subs(x = 2, F);` Substitui 2 por x na expressão F.

`sum(ii, ii = 1 .. n);` Forma uma soma a partir do índice ii, A letra dupla é usada para evitar possíveis confusões, visto que i é um nome comum para uma variável.

`Sum(ii, ii = 1 .. n)` Forma inerte do comando *sum*.

`value(n);` Usado para avaliar expressões inertes como *Int*.

`value(S), evalf(S)` Estes comandos são diferentes: *value* reduz uma integral inerte ou soma (*Int* ou *Sum*) a uma fórmula, quando, *evalf* reduz o resultado a sua aproximação decimal.

Aproximando a Área de Figuras Curvas Para Retângulos.

A idéia essencial por trás do cálculo diferencial é achar a fórmula para o coeficiente angular da reta tangente de uma curva continua, dado um ponto de tangência. Os dois capítulos anteriores estudaram esta idéia e a aplicaram na resolução de problemas envolvendo proporções de mudança. Um resultado importante é que desde que a curva possua uma tangente, se for suficientemente ampliada, um segmento da curva vai parecer uma linha reta. Logo, de uma maneira, todos os problemas se tornam lineares quando obedecem estas condições, e pequenas mudanças são necessárias.

Outra forma de linearização nos leva ao método de encontrar a área abaixo da curva. A área abaixo da curva é foco central do cálculo integral. Nos primórdios da matemática, já eram conhecidas varias fórmulas de áreas. Dentre elas a área do quadrado de lado x, $A = x^2$, e a área do retângulo de lados a e b onde $A=ab$. A área do triângulo de altura h e base b também era conhecida: $A=1/2 bh$. Estas fórmulas permanecem até hoje, ainda que 2500 tenham se passado! As áreas de polígonos, figuras com muitos lados os quais todos são linhas retas, não apresentaram qualquer problema para a matemática antiga. Pois de qualquer forma eles poderiam ser divididos em vários triângulos, quadrados ou retângulos desenhando algumas linhas a mais. Os volumes de formas simples também não demoraram a vir a tona. Por exemplo, o volume de um cubo de lado x é $V=x^3$, e o volume de um sólido com faces retangulares é $V=abc$ (sendo os comprimentos a, b,e c).

As áreas das figuras delimitadas por linhas curvas apresentaram um problema um pouco maior, ainda que o exemplo mais importante seja a area do circulo. Os antigos já sabiam que a área do circulo é $A = \pi r^2$ (com r sendo o raio), mas ficou complicado ao calcular este número com mais que algumas casas decimais. Claro um de seus problemas era que eles não tinham a facilidade da notação decimal. O grande Archimedes (287 – 212 a .c.) determinou que a área de um circulo de raio 1 é menor que $3 \frac{1}{7}$ e maior que $3 \frac{10}{71}$. Ele chegou a este incrível resultado inventando a idéia que é a base do cálculo integral. Infelizmente, uma deficiência de um

sistema numérico adequado e uma negligência na geometria analítica não permitiram que ele fosse mais adiante.

Podemos fazê-lo a partir de René Descartes (1596-1650) que mostrou como relacionar geometria a álgebra. O resultado é chamado *geometria analítica*. Como resultado de seu trabalho, temos fórmulas algébricas para figuras geométricas como linhas retas, círculos, parábolas, e muitos outros. Com estas fórmulas o cálculo integral pôde ser desenvolvido. O objetivo básico é encontrar uma forma de achar a área de uma figura. Aceitamos que a figura é delimitada por lados que podem se expressados algebricamente. Vamos começar com o triângulo e o retângulo, mas vamos utilizar a abordagem da geometria analítica.

Exemplo 5-1: Área de um retângulo

Encontre a fórmula geral para o retângulo cujos lados são determinados pelo eixo y , a linha $y = b$ e o eixo x . O outro lado é uma linha vertical (Figura 5.1).

Resolução: O retângulo pode ser subdividido em retângulos menores. Não há necessidade de realizar este passo quando o objetivo é achar a área do retângulo, mas já ilustra o processo que será necessário mais tarde. A Figura 5.2 mostra o retângulo da Figura 5.1 dividido.

A altura do retângulo continua b , mas a base de cada retângulo agora é $dx = a/10$. A área de cada um é $a/10 \times b$, ou $ab/10$. Visto que são 10 retângulos, a área de todos juntos

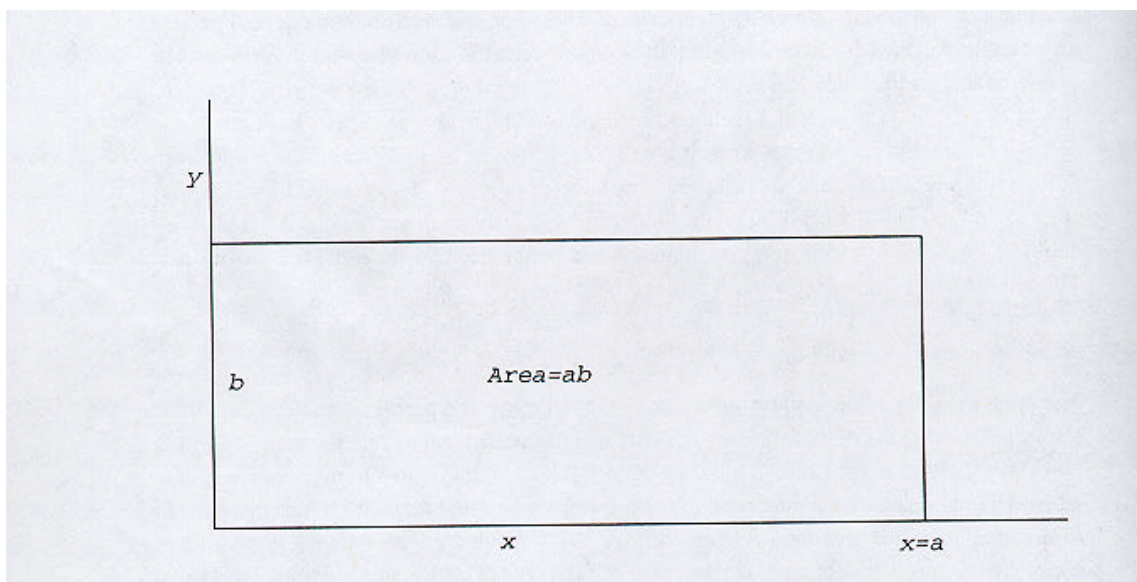


Figura 5.1 A área de um retângulo no formato da geometria analítica.

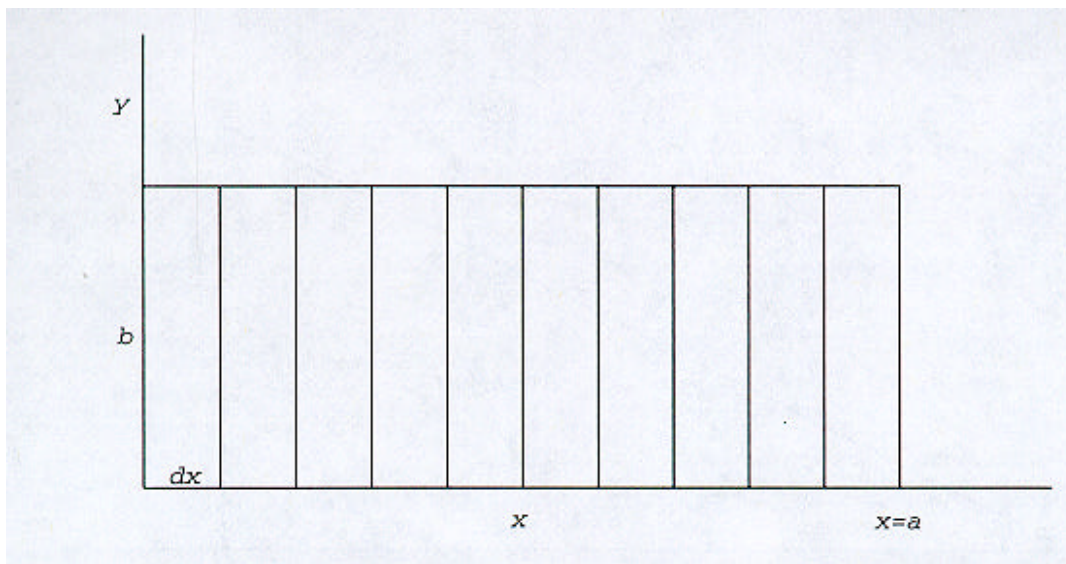


Figura 5.2 O retângulo da Figura 5.1, dividido por 10

é ab . A área do retângulo na figura 5.1 é ab , e a soma das áreas dos retângulos da figura 5.2 também é ab . Teríamos sérios problemas com a nossa matemática se as duas formas de chegar a este resultado fossem diferentes.

A técnica de decompor a figura em retângulos pode ser aplicada a outras figuras, como o triângulo. Vamos tentar achar a área de um triângulo por subdivisão. O triângulo é mostrado na Figura 5.3.

Nós sabemos que a área de um triângulo de base a e altura h é $ah/2$. Vamos tentar a subdivisão em retângulos. Vamos pegar um exemplo específico e trabalhar com a plotagem do Maple. Existe outra razão porque é uma boa idéia ter um exemplo numérico.: Queremos ter um senso de precisão em nossas aproximações. Vamos começar com um triângulo retângulo. Que a base deste triângulo seja ao longo do eixo x e a hipotenusa ao longo da linha $y = x/2$. Na verdade, esta é a forma que foi construído o triângulo na Figura 5.3. O Maple tem três rotinas para desenhar retângulos: *leftbox*, *middlebox* e *rightbox*. Elas estão no pacote *student*. Aqui está como reconstruir a Figura 5.3 usando a rotina *middlebox* (Figura 5.4).

```
>middlebox(x/2, x = 0 ..5, 10, color=black);
```

Você vai reconhecer as opções de plotagem no comando *middlebox*. O parâmetro 10 diz ao Maple quantas caixas desenhar. O triângulo foi aproximado por uma escada de retângulos. Qual a precisão da aproximação? Precisamos calcular as áreas dos retângulos para saber. A hipotenusa do triângulo cruza o centro da base superior de cada retângulo.

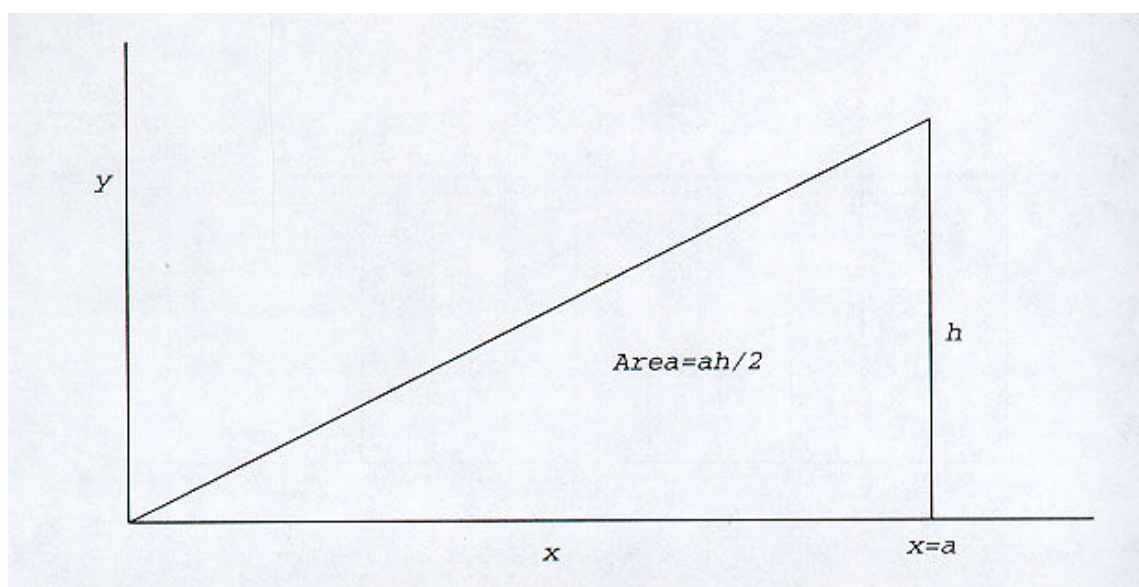


Figura 5.3 Área de um triângulo

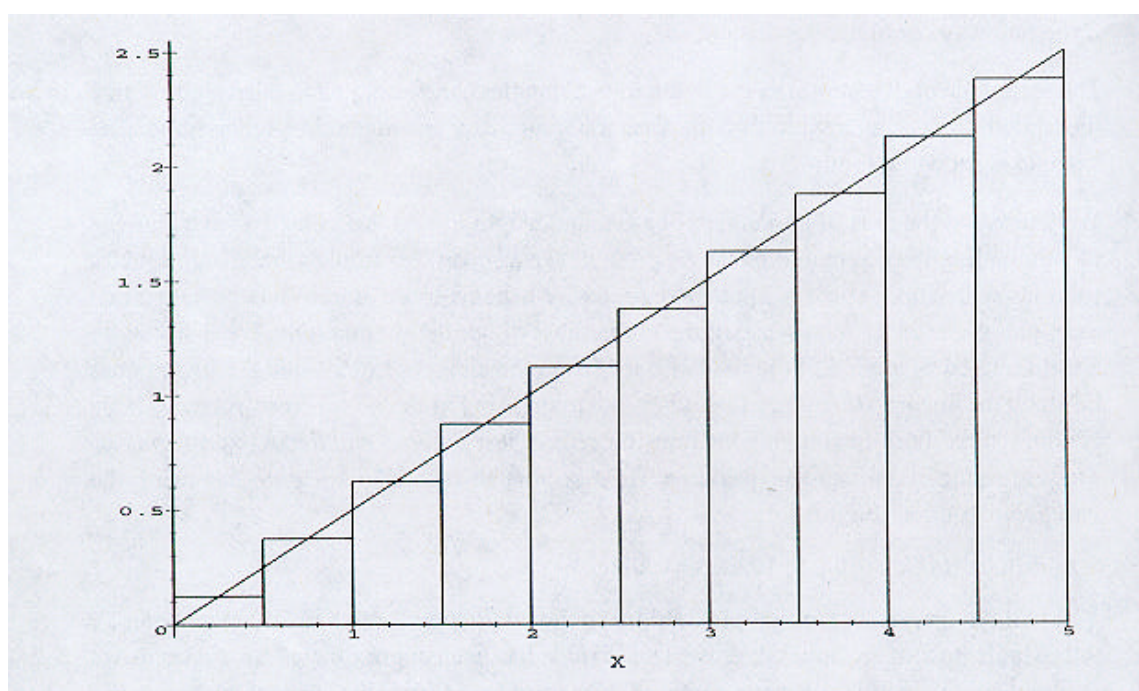


Figura 5.4 A aproximação da área de um triângulo usando retângulos.

Os retângulos e a hipotenusa se interseccionam em $x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}, \dots, 4\frac{1}{4},$ e $4\frac{3}{4}$. As alturas nestes pontos são $y = \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{21}{8}$ e $2\frac{3}{8}$, considerando que a equação $y = x/2$ deve ser satisfeita. A base de cada triângulo é $\frac{1}{2}$, então a área total de todos os retângulos é $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{17}{8} + \frac{17}{8})$. É bom saber que o Maple pode ajudar com a soma. Correspondendo aos comandos gráficos *leftbox*, *middlebox* e *rightbox* estão os comandos de soma *leftsum*, *middlesum* e *rightsum*. Qualquer que você use o significado é basicamente o mesmo do correspondente Box. Não digite opções de plotagem, pois estes não são comandos de plot. Neste caso já que usamos *middlebox* usaremos *middlesum*.

>s := middlesum(x/2, x = 0 .. 5, 10);

$$s := \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^9 \left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{8} \right) \right)$$

Caso você não esteja familiarizado, com o símbolo de somatório ($\sum$), significa que os termos dentro dos parênteses devem ser somados. O símbolo de índice, i , tira todos os valores integrais de $i = 0$ até $i = 9$. Logo, existem 10 termos na soma, começando com $\frac{1}{8}$, para $i = 0$, a terminando com $\frac{9}{4} + \frac{1}{8} = \frac{19}{8}$, para $i = 9$. Você poderia encontrar o resultado numérico para esta soma usando o comando *evalf*, mas isto lhe daria uma aproximação decimal. O resultado exato pode ser achado usando o comando *value*.

>value(s);

$$\frac{25}{4}$$

Se você já encontrou a área do triângulo da Figura 5.4 usando a fórmula $A = ah/2$ você sabe que a resposta correta é $25/4$. A área dos dez retângulos também é $25/4$! Como a soma dos retângulos dá a resposta correta, ainda que os retângulos claramente formam uma figura diferente? A resposta é que a parte de cima de cada retângulo formam dois pequenos triângulos quando são cortados pela hipotenusa do triângulo maior. Ainda as áreas dos dois pequenos triângulos são iguais, cada base tem o comprimento de $\frac{1}{4}$, e suas alturas são iguais e opostas. A primeira metade do retângulo superestima a área, e a segunda metade subestima exatamente a mesma quantidade. Tudo junto, os erros se cancelam. Por isso a área encontrada pela aproximação do triângulo é exata.

Agora estamos no momento de estudar as linhas curvas, como parábolas, mas, antes vamos dar uma olhada em algumas propriedades de símbolo de somatório, o qual vai aparecer quando formos usar o comando *middlesum* para somar retângulos.

Fórmula Para Somas

Como provavelmente você esperava, o comando do Maple para somar um número de termos relacionados é `sum`.

Na verdade o comando vem em duas formas o comando `Sum` usando o símbolo de somatório, e então você pode usar `value` para chegar a resposta. Isto permite que você expresse o símbolo de somatório em notação matemática comum. Isto é bem útil quando estiver escrevendo relatórios para que você possa usar a mesma forma de escrita dos livros de matemática.

A fórmula para o somatório dos primeiros n números inteiros é encontrada com o comando do Maple:

>Sum(ii, ii = 1 ..n) = sum(II = 1 .. n);

$$\sum_{ii=1}^n ii = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}$$

Duas ressalvas devem ser feitas. A primeira é que a fórmula não se parece com a fórmula da maioria dos livros, onde provavelmente você vai encontrar como $\frac{1}{2}n(n+1)$. Mas, isto é fácil de resolver. Simplesmente trabalhe com o lado direito da equação, como no comando seguinte:

>Sum(ii, ii = 1 .. n) = factor (simplify(sum(ii, ii = 1 .. n)));

$$\sum_{ii=1}^n ii = \frac{1}{2}n(n+1)$$

O segundo ponto esta em relação a porque usamos `ii` como variável do índice ao invés de uma escolha mais simples, `i`. A razão é simples, `i` é um símbolo muito comum que você já pode ter usado antes na mesma sessão. Neste caso, o nome `i` não é mais uma variável disponível e você vai receber uma mensagem de erro.

Exemplo 5-2: A soma dos Primeiros n Quadrados

Ache a soma dos quadrados dos primeiros n números inteiros.

Resolução:

>Sum(ii^2, ii = 1 .. n) = factor(simplify(sum(ii^2, ii = 1 .. n)));

$$\sum_{ii=1}^n ii^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Mais uma vez usamos simplify e factor para expressar a resposta na forma padrão, e usamos as duas formas do comando sum. Logo vamos precisar deste resultado quando estudarmos a área abaixo da curva $y = x^2$.

Sua vez: Ache o somatório dos primeiros n cubos e simplifique o resultado.

Resposta: _____

Combinando Somatórios

Quando você trabalha com o símbolo de somatório, você precisa compreender que é apenas uma forma simplificada de escrever a soma de vários termos. Por exemplo, se você tivesse 100 termos em sua soma, você pode decidir somar os 50 primeiros termos e lembrar do resultado. E então somar os outros 50 termos e lembrar do resultado novamente. Até que você resolva somar os dois resultados para obter uma resposta final. Não faz diferença qual a ordem que você escolha para somar os termos, ou se você decida fazer somas parciais e depois somar tudo. Isto pode ser resumido com o seguinte comando do Maple. Perceba que o comando *combine* é usado para simplificar o resultado. Tente o comando sem usar o *combine* e você verá que o lado direito permanece o mesmo que o lado esquerdo. Também veja que a função indefinida $ex(ii)$ pode ter qualquer nome para representar qualquer expressão contendo a variável de índice.

>S := Sum (ex(ii), ii = 0 .. n)+Sum(ex(ii), ii = n+1 .. N);

$$S := \left(\sum_{ii=0}^n ex(ii) \right) + \left(\sum_{ii=n+1}^N ex(ii) \right)$$

>S=combine (value(S));

$$\left(\sum_{ii=0}^n ex(ii) \right) + \left(\sum_{ii=n+1}^N ex(ii) \right) = \sum_{ii=0}^N ex(ii)$$

Outra propriedade do somatório é o seu comportamento quando cada termo da soma contém um elemento comum.

>S := Sum(k*ex(ii), ii = 1 .. n);

$$S := \sum_{ii=1}^n kex(ii)$$

>S = expand(s);

$$\sum_{ii=1}^n kex(ii) = k \left(\sum_{ii=1}^n ex(ii) \right)$$

O termo comum K foi fatorado, ainda que o comando `expand` seja usado para chegar ao resultado. Obviamente, o Maple está tratando o somatório diferentemente de uma sequência de termos a serem adicionados., onde o comando `factor` seria adequado.

Vamos aplicar as regras de somatórios ao problema de estimar a área abaixo da parábola $y = x^2$. Vamos começar com um exemplo numérico.

Exemplo 5.3: A área abaixo da curva $y = x^2$

Estime a área da figura delimitada pelo eixo x e a linha $y = x^2$ de $x = 0$ até $x = 2$.

Resolução: A área que queremos é mostrada na figura 5.5.

Vamos tentar a resolução usando `middlebox` com 10 retângulos. Figura 5.6 mostra os retângulos.

>middlebox(x^2, x=0 ..2, 10);

Agora somaremos as áreas dos retângulos usando `middlesum`.

>S := middlesum(x^2, x = 0 .. 2, 10);

$$S := \frac{1}{5} \left(\sum_{i=0}^9 \left(\frac{1}{5}i + \frac{1}{10} \right)^2 \right)$$

Agora vamos calcular o valor desta soma exatamente, usando `Value`, e aproximadamente, usando `evalf`.

>value(S), evalf(S);

$$\frac{133}{50}, 2.66000000$$

Na verdade, não é de grande serventia calcular a soma exata aqui, visto que como podemos ver na figura 5.6 os triângulos de cima e de baixo não têm a mesma área.¹ Logo, os retângulos são na verdade uma apenas estimativa da área abaixo da curva, nós podemos

1. Não triângulos verdadeiros – um dos lados é uma curva, e não uma linha reta.

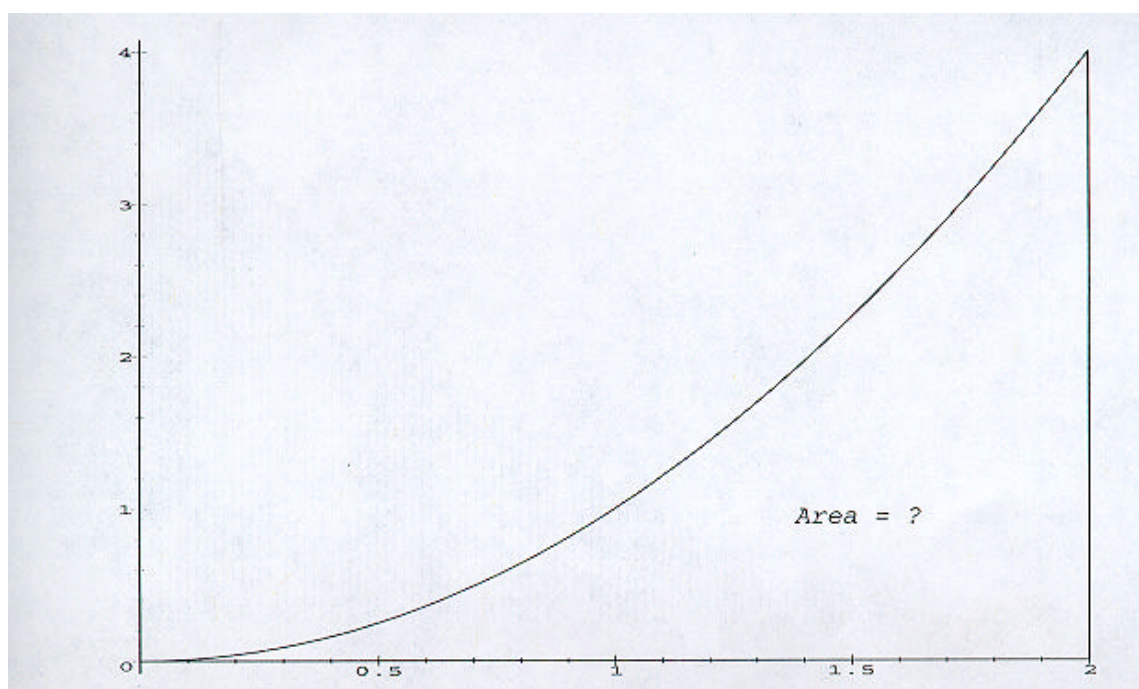


Figura 5.5 A área abaixo da curva $y = x^2$ para o intervalo $x = 0 \dots 2$

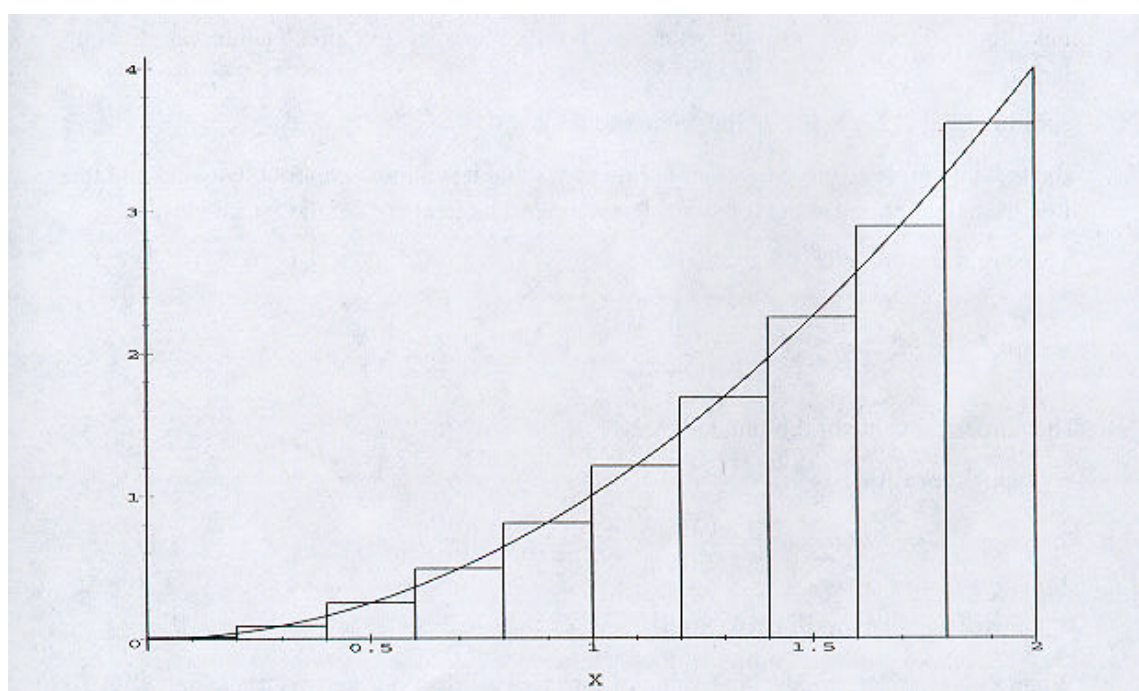


Figura 5.6 A aproximação da área com os retângulos.

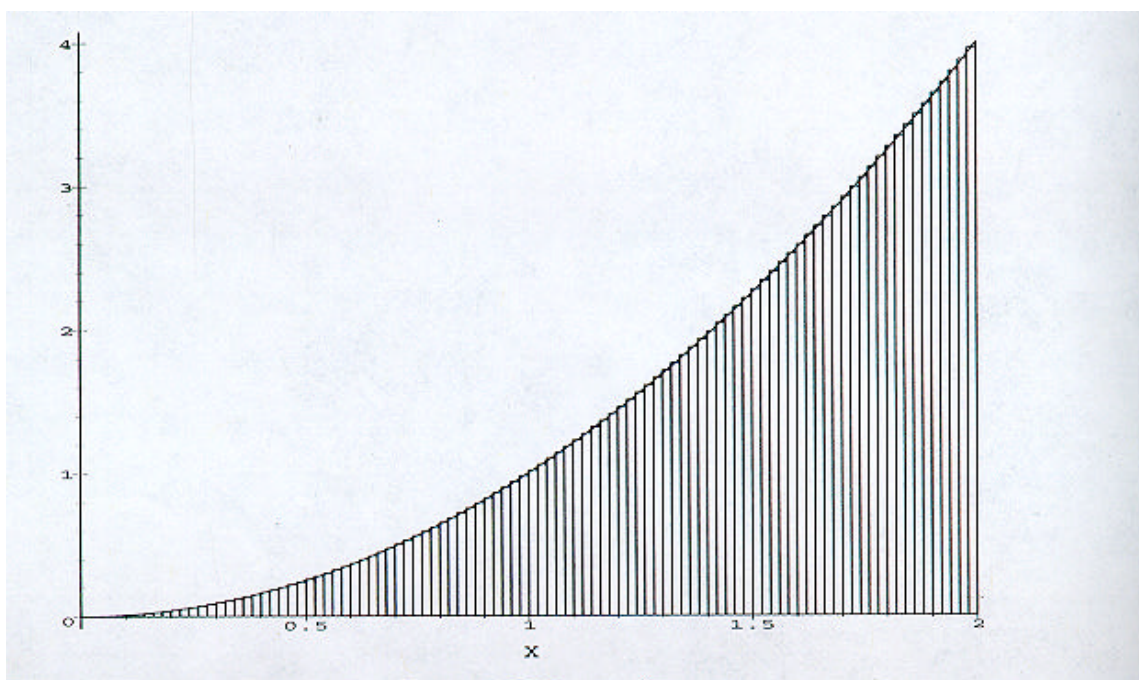


Figura 5.7 Aproximando a área com 100 retângulos.

Fazer uma estimativa cada vez melhor escolhendo intervalos cada vez menores para nossos retângulos.

```
>middlebox(x^2, x = 0 .. 2, 100, color=black);
```

Os retângulos estão tão juntos que é quase impossível distinguir os pequenos triângulos formados no topo de cada retângulo. A área total destes triângulos é

```
>S := middlesum(x^2, x = 0 .. 2, 100);
```

$$S := \frac{1}{50} \left(\sum_{i=0}^{99} \left(\frac{1}{50}i + \frac{1}{100} \right)^2 \right)$$

O valor numérico da soma é

```
>value(S), evalf(S);
```

$$\frac{13333}{5000}, 2.666600000$$

Encontrando Melhores Estimativas

Quando você compara o valor decimal de nossa estimativa de área nas duas tentativas, uma com 10 retângulos e outra com 100, parece que a área está convergindo e, 2.666666..., ou

8/3. É mais difícil ver que $13,333/5$ é próximo de $8/3$, mas difere de $8/3$ apenas em uma parte em 15000. Confirme isto somando $1/15000$ com $13333/5000$. você terá $8/3$. Podemos demonstrar que a área abaixo da parábola é exatamente $8/3$ aplicando a teoria de limites. O número de retângulos será uma variável.

>S := middlesum(x^2, x = 0 .. 2, n);

$$S := 2 \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left(4 \frac{\left(i + \frac{1}{2}\right)^2}{n^2} \right)}{n}$$

O S tende a um limite enquanto o número de retângulos, n, tende ao infinito? Para descobrir, vamos emitir o comando *limit*.

>S1 := limit(S, infinity);

$$S1 := \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left(4 \frac{\left(i + \frac{1}{2}\right)^2}{n^2} \right)}{n}$$

Avaliaremos o resultado da mesma forma que fizemos nos dois casos anteriores.
value(S1), evalf(S1);

$$\frac{8}{3}, 2.666666667$$

O resultado é exatamente.

Definição da Integral Definida

Nós encontramos a área abaixo de uma curva específica, $y = x^2$, para o intervalo específico, $0 \leq x \leq 2$. Usando as propriedades do somatório e as propriedades do limite, podemos generalizar estes resultados muitas outras funções e intervalos.

Vamos definir a integral definida como limite da soma das áreas dos retângulos numa situação onde as bases destes retângulos se tornam cada vez menor. Se f é uma função continua com variável x , a área entre $f(x)$ e o eixo x delimitada pelos pontos x_1 e x_2 , é

>definida_integral = limit(middlesum(f(x), x = x1 .. x2, n), n = infinity);

$$\text{definida_integral} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_2 - x_1) \left(\sum_{i=0}^{n-1} f \left(x_1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)(x_2 - x_1)}{n} \right) \right)}{n}$$

Esta é uma fórmula imponente! A chave em integração, assim como na diferenciação, é desenvolver a fórmula para funções comuns. Podemos prever que as fórmulas não serão mais difíceis de manusear que as fórmulas de diferenciação.

Áreas positivas e negativas

Nos exemplos que discutimos até agora, o gráfico da função sempre esteve acima do eixo x. Considere as possíveis formas nas quais a integral poderia ser definida quando o gráfico da função se encontra abaixo do eixo x. Escolheremos a função $5 - 4x - x^2$ no intervalo $x = 0 \dots 2\sqrt{6} - 3$. O gráfico é mostrado na figura 5.8, junto com os retângulos produzidos pelo middlebox.

>ex := 5-4*x - x^2;

$$\text{ex} := -x^2 - 4x + 5$$

Queremos definir a integral como a área abaixo da curva, Mas, como definir a área deste exemplo? Consideraremos a área de cada retângulo como um número positiva (assim como faríamos na geometria), ou levamos em conta o fato de que os valores de y são negativos para $x > 1$? Surpreendentemente, talvez a resposta seja a última. A área de qualquer retângulo abaixo do eixo x recebe um valor negativo. A razão para esta escolha é que é a definição mais natural para praticamente todos os casos. Pois esta é a definição aceita para os somatórios das áreas, middlesum produz o valor

>evalf(value(middlesum(ex, x = 0 .. 2*sqrt(6) - 3, 10)));

.005706625152

Examinando a figura 5.8, você pode ver que existem dois quase-triângulos,² cujas alturas médias são por volta de 5. A base de cada triângulo é 1. Se tirarmos a área de cada um como positiva, a área combinada é próxima a 10, nem perto do valor da middlesum de 0.0057. Nós podemos calcular a área exata pelo limite.

2. Quase-triângulos pois a hipotenusa não é uma linha completamente reta.

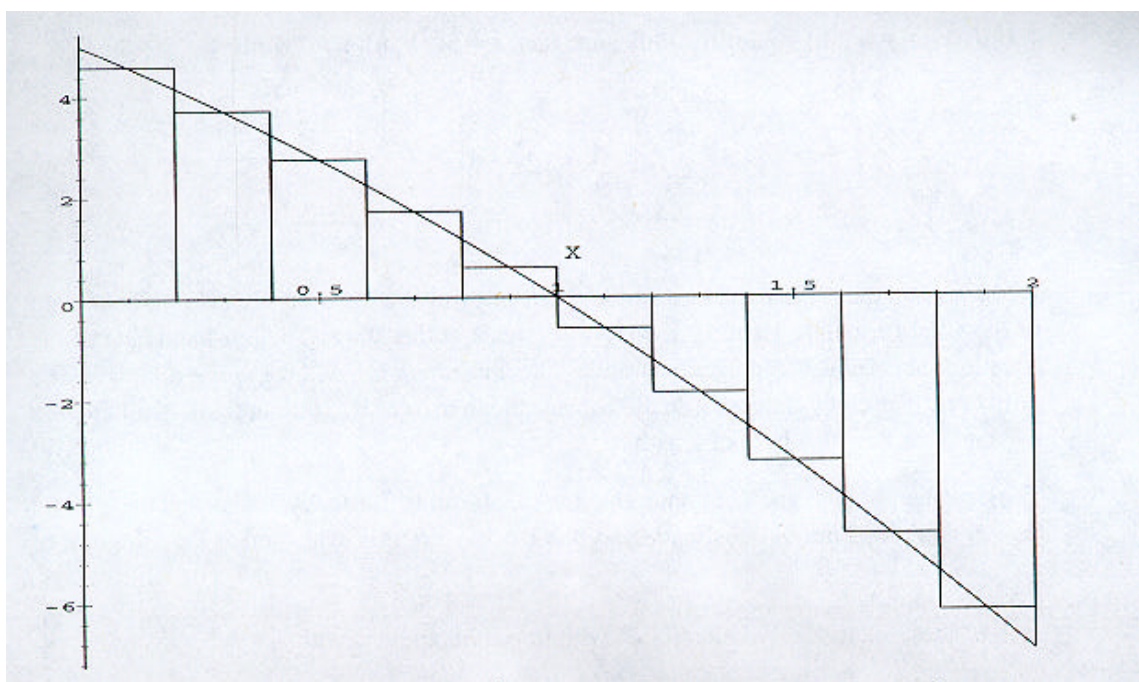


Figura 5.8 O Gráfico de $y = 5 - 4x - x^2$ e os retângulos para a aproximação da área.

```
>value(limit(middlesum(ex, x = 0 .. 2*sqrt(6) - 3, n), n = infinity));
```

0

Obviamente, O Maple está seguindo uma regra padrão do cálculo que qualquer área abaixo do eixo x é um valor negativo. Mais uma vez, porque a altura do retângulo, y , é negativa quando o retângulo se encontra abaixo do eixo x .

O teorema Fundamental do Cálculo

Já consideramos o problema de achar uma área abaixo da curva. Esta área pode ser aproximada desenhando os retângulos. A medida que o número de retângulos cresce, desta forma fazendo com que a base dos retângulos diminua, alcançamos uma aproximação mais precisa. A *Integral Definida* é definida como o limite das somas das áreas dos retângulos. O símbolo da integral é um S alongado. No Maple a definição da integral definida da função $f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ é

Int(f(x), x = a .. b) = Limit(middlesum(f(x), x = a .. b, n), n = infinity);

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a) \left(\sum_{i=0}^{n-1} f \left(a + \frac{\left(i + \frac{1}{2}\right)(b-a)}{n} \right) \right)}{n}$$

Nós usamos os comandos com letras maiúsculas tanto no comando da integral quanto no comando de limite pois apenas queremos mostrarmos fórmulas. Não há nada a ser avaliado neste estágio. O lado esquerdo da equação mostra como deve ser escrita a integral. O limite inferior é a e o superior é b. O símbolo dx deve se referir a uma pequena distância no eixo x. Você pode pensar em todos os pequenos retângulos tendo base de comprimento dx.

O lado direito da equação é outra fórmula imponente. Basicamente diz que o intervalo (b-a) é dividido em n partes iguais e a função f é avaliada ao ponto médio de cada um destes

intervalos. Nós identificamos dx com (b-a)/n, e f(x) com $f \left(a + \frac{\left(i + \frac{1}{2}\right)(b-a)}{n} \right)$.

Pode levar um tempo para que você se convença de que é verdade, mas apenas examine cada parte da soma. O fator $(i + \frac{1}{2})$ seleciona o ponto médio do i-ésimo intervalo depois de ser multiplicado por (b-a)/n e somado a . Isto nos posiciona ao equivalente ao ponto x. Logo todo este termo é equivalente a f(x).³

Agora estamos prontos para entender o que diz o teorema fundamental do cálculo. Pense no limite superior da integral como uma variável e chamemos este ponto de x. Agora a integral é uma função deste limite x, pedimos a derivada desta função. Para ter uma indicação da resposta, escolhamos uma função geral f(x), e definimos a integral como a soma de 1000 retângulos. Chame a soma de S(x). Agora vamos adicionar mais um retângulo e estender a soma. Chame esta soma de S(x+dx). Subtraia a soma da antiga e divida pelo comprimento da base do retângulo criando (S(x+dx) - S(x))/dx. Você reconhece esta fórmula como o quociente de diferença no limite de quando dx se aproxima de zero, é a derivada. Logo estamos tirando a derivada da integral. Juntando tudo numa fórmula do Maple chegamos em

>simplify((middlesum(f(x), x = 0 .. x+x/1000, 1001) - middlesum(f(x), x = 0 .. x, 1000))/(x/1000));

$$\left(\sum_{i=0}^{1000} f \left(\frac{1}{2000} (2i+1)x \right) \right) - \left(\sum_{i=0}^{999} f \left(\frac{1}{2000} (2i+1)x \right) \right)$$

³ O somatório é equivalente a f(x+dx/2), mas estamos aproximando para f(x).

A primeira soma contém 1.001 intervalos, visto que a segunda contém 1000 intervalos. A fórmula é exatamente a mesma para as duas somas. Logo, Logo todos os termos menos o último serão cortados quando forem subtraídos. O que restará é

$f\left(\frac{1}{2000}(2 \cdot 1,000+1)x\right) = f\left(\left(1+\frac{1}{2000}\right)x\right) \approx f(x)$. Você pode ver que se fossem escolhido 10000 intervalos, o resultado seria ainda mais próximo de $f(x)$. Fizemos a seguinte afirmação plausível: O teorema fundamental do cálculo integral diz que a derivada da integral de uma função cujo limite superior é x é $f(x)$.

Teorema Fundamental do Cálculo Integral(primeira forma)

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

A variável de integração, t , pode assumir outros nomes se que afete o resultado. O teorema fundamental diz que a diferenciação é o inverso da integração. Veremos em breve que a integração é quase o inverso da diferenciação.

Integrais indefinidas (Antiderivadas)

A integral da função linear $ax + b$ é

>expand(value(limit(middlesum(a*x+b, x = 0 .. x, n), n = infinity))));

$$xb + \frac{1}{2}ax^2$$

Logo, a forma $ax+b$ se transforma em $ax^2/2+bx$ por integração. É facilmente verificado que a integral de b é bx e que a integral de ax é $ax^2/2$.

Estamos próximos de nosso objetivo de encontrar as fórmulas das integrais de funções comuns. Já que a integral é a função de seu limite superior.,

>Int(f(x), x = 0 .. a) = F(a), Int(f(x), x = 0 .. b) == F(b);

$$\int_0^a f(x)dx = F(a), \int_0^b f(x)dx = F(b)$$

Estas fórmulas afirmam que as integrais até agora funções indeterminadas de seus limites superiores. Porém, ambos são a mesma função. Isto é o que significa que elas são uma função de seus limites. Já que sabemos que as integrais são relacionadas a áreas, aceitando que $b>a$, temos a seguinte relação:

>Int(f(x), x = a .. b) = F(b) – F(a);

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (5-1)$$

A equação 5-1 também é chamada de teorema fundamental do cálculo. Podemos usar este resultado para definir a integral indefinida como

>Int(f(x), x) = F(x);

$$\int f(x)dx = F(x) \quad (5-2)$$

Sempre que uma integral indefinida for necessária, use a equação 5-1; Quando apenas a forma funcional for necessária use a equação 5-2. Esta apresentação é um pouco diferente da texto de cálculo usual, onde a integral indefinida é dada como

>Int(f(x), x) = F(x) + Constant;

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) + \text{Constant} \quad (5-3)$$

Na equação 5-1 a integral é a diferença de dois termos. O segundo termo pode ser interpretado como a constante na equação 5-3.

A equação 5-2 é apresentada sem a chamada constante de integração pois o Maple escreve sua integral indefinida desta forma. Você tem que lembra de somar a constante de integração se for pedido pelo problema que você estiver resolvendo. Você verá vários exemplos mais a frente.

Nossa discussão nos leva a segunda forma do teorema fundamental.

Teorema Fundamental do Cálculo Integral (Segunda Forma)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), F' = f$$

Onde F' é a derivada de F.

Fórmulas integrais

Podemos usar a definição da integral como um limite para gerar fórmulas para funções padrão. Lembre-se que as fórmulas abaixo contém uma constante arbitrária de integração ou seja não mostrada (característica da linguagem do Maple).

A Integral de Uma Constante

`>Int(C, x) = value(limit(middlesum(C, x = 0 .. x, n), n=infinity));`

$$\int C dx = xC$$

Integral de x

`>Int(x, x) = value(limit(middlesum(x, x = 0 .. x, n), n=infinity));`

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

Integral de x^n

`>Int(x^n, x) = simplify(value(limit(middlesum(x^n, x = 0 .. x, r), r=infinity)));`

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}$$

Veja que tivemos que mudar a variável do número de intervalos para que não tenha conflito com a potência que está elevando x , que tradicionalmente é chamada de n . Esta fórmula trabalha com $n \neq -1$. Se n for igual a -1 a fórmula seguinte, para integral de $1/x$, deve ser usada.

Daqui em diante, usaremos as capacidades integrativas do Maple para listar as fórmulas de integração ao invés de avaliarmos cada fórmula como limites de somatórios.

Integral de $1/x$

`>Int(1/x, x)=int(1/x, x);`

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

Integral de e^x

`>Int(exp(x), x) = int(exp(x), x);`

$$\int e^x dx = e^x$$

Integral de Funções Trigonométricas

`>Int(sin(x), x) = int(sin(x), x);`

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

>Int(cos(x), x) = int(cos(x), x);

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

>Int(tan(x), x) = int(tan(x), x);

$$\int \tan(x) dx = -\ln(\cos(x))$$

>Int(cot(x), x) = int(cot(x), x);

$$\int \cot(x) dx = \ln(\sin(x))$$

>Int(sec(x), x) = int(sec(x), x);

$$\int \sec(x) dx = \ln(\sec(x) + \tan(x))$$

>Int(csc(x), x) = int(csc(x), x);

$$\int \csc(x) dx = \ln(\csc(x) - \cot(x))$$

Todas as fórmulas para integrais de funções comuns com exceção das últimas três devem ser memorizadas. Elas são a base para muitos dos problemas de integração frequentemente encontrados.

Integrais Compostas

As regras para simplificar integrais são as mesmas dos somatórios. A integral é a área abaixo da curva; tem algumas propriedades especiais. Você já viu uma destas propriedades, quer dizer, qualquer área abaixo do eixo x é negativa. A outra propriedade da integral está relacionada ao intervalo de integração. Até agora, nós aceitamos que o limite inferior, a , se encontra à esquerda do limite superior, b . Se os limites forem trocados, temos a regra que revertendo os limites da integração reverteremos o sinal da integral.

>Int(f(x), x = a .. b) = -Int(f(x), x = b .. a);

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

Exemplo 5-4: Revertendo os limites de integração

Descubra de o Maple sabe da regra de reverter os limites. Ache a integral do $\sin(x)$ para $x = 0 \dots \pi$ e para $x = \pi \dots 0$.

Resolução: Escreva as integrais nas formas com letra maiúscula e minúscula. Use os comando copy e paste para facilitar.

>Int(sin(x), x = 0 .. Pi) = int(sin(x), x = 0 .. Pi), Int(sin(x), x = Pi .. 0) = int(sin(x), x = Pi .. 0);

$$\int_0^p \sin(x) dx = 2, \int_p^0 \sin(x) dx = -2$$

As integrais são simétricas como era esperado.

Sua vez: Avalie a integral de $1/x$ de $x = 1$.. $\exp(1)$. Demonstre que a integral de $1/x$ de $x = \exp(1)$.. 1 é a negativa da primeira integral.

Resposta: _____

Outras regras úteis para a simplificação das integrais a mão

A integral do produto de uma constante e uma função. O seguinte resultado mostra que a constante pode ser fatorada para fora do sinal de integral.

>Int(c*f(x), x = expand(Int(c*f(x), x));

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

Logo, a integral da soma das funções é a soma das integrais.

>Int(f(x) + g(x), x) = expand (int(f(x) + g(x), x));

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx + c$$

Perceba a aparição do termo constante no resultado. A integral indefinida é qualquer função cuja derivada é igual a função que está sendo integrada. Vendo que a derivada de uma constante é zero, as funções $F(x)$ e $F(x) + C$ tem a mesma derivada, $f(x)$. Quando você usa o Maple para encontrar a integral de uma soma e então tenta achar a soma da integral, você pode pensar que está tendo dois resultados diferentes porque as expressões não parecem as mesmas. Porém, se você plotar as duas respostas, você verá que o formato das curvas é o mesmo, mas um se posiciona acima do outro indicando que elas diferem por uma quantidade constante. Isto é possível, porque duas integrais indefinidas que diferem por uma constante são consideradas equivalentes.

Descontinuidades

Certifique-se de examinar cuidadosamente o domínio das funções para continuidades quando estiver fazendo uma integração definida. Se a integral indefinida de $f(x)$ for $F(x)$, você sabe que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Agora, a fórmula só é verdadeira se a função f for contínua pelo domínio de x . Veja o que acontece se isto for esquecido. Imagine um problema onde temos que achar a área abaixo da curva $(x - 3)^{-2}$ para $x = 2 \dots 4$. Se a decisão for aplicar a fórmula anterior, a integral indefinida é achada e chamada de F . Então, os valores dos pontos das extremidades são substituídos em F e subtraídos. O resultado da área abaixo da curva é -2 .

```
>F := int(1/(x - 3)^2, x);
```

$$F := \frac{-1}{(x-3)^2}$$

```
>subs(x = 4, F) - subs(x = 2, F); (resposta errada!)
```

A abordagem correta é pedir ao Maple por uma integral definida. A resposta é infinito e não -2 .

```
>int(1/(x-3)^2, x = 2 .. 4);
```

∞

A plotagem mostra a descontinuidade em $x = 3$ (Figura 5.9). É óbvio que os retângulos construídos em torno de $x = 3$ serão bem altos, resultando em uma grande contribuição à área.

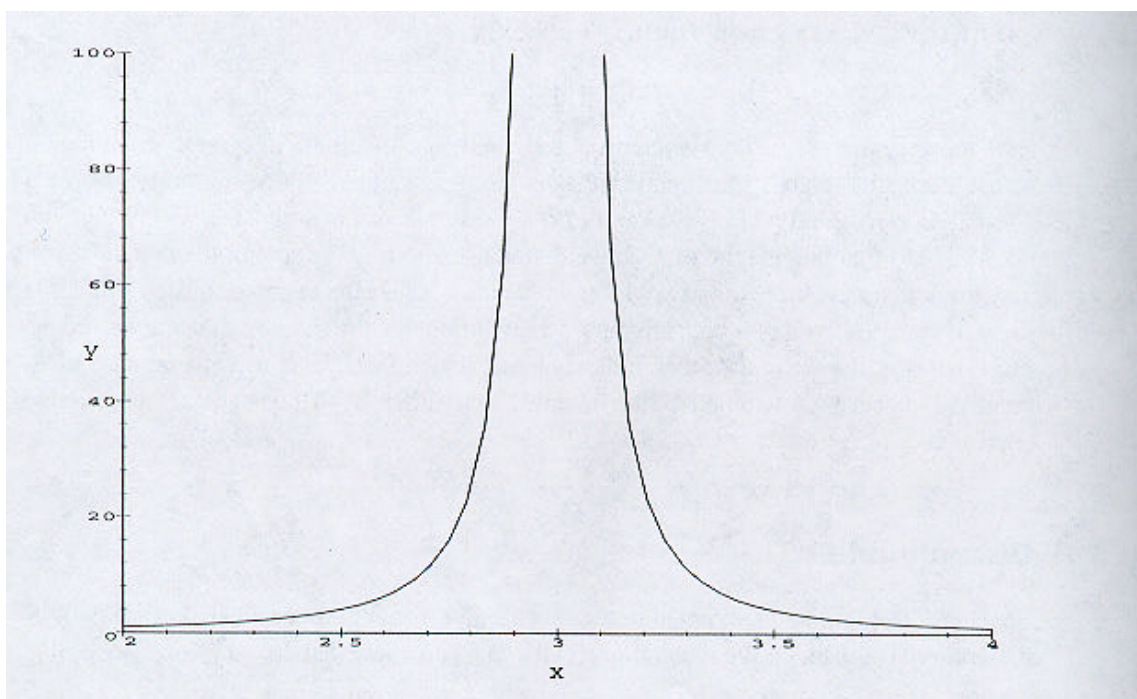


Figura 5.9 A área desta função descontínua é ∞

Técnicas de Integração

A regra da cadeia garante que a derivada de qualquer fórmula pode ser achada desde que as derivadas de todas as partes da função sejam conhecidas. Dê ao Maple qualquer fórmula desenvolvida a partir de funções comuns, não importa o quão complicadas, que o Maple vai achar uma resposta. A situação é diferente quando falamos de integração. Aqui o problema é achar a função cuja derivada é a função sendo integrada. Nem todas as combinações de funções comuns tem uma integral que também seja uma função comum. Por esta razão a integração é um problema mais difícil que a diferenciação. Você não tem garantia que existe uma maneira de expressar a integral de uma determinada função em termos de uma função conhecida. Ainda pior, o Maple pode conhecer algumas funções que você talvez não conheça, e pode escrever estas respostas em termos destas funções.

Isto significa que existem duas dificuldades. O Maple pode oferecer uma resposta que você não reconheça, ou pode até não ser capaz de achar resposta alguma. A resolução para o primeiro problema é dar uma olhada em funções não reconhecidas em alguns textos de referência. A segunda dificuldade deu trabalho a matemática por séculos. Integração em geral é muito difícil. Varias técnicas foram inventadas para cobrir certas classes de problemas. Vamos introduzir algumas delas para que você possa aplicar para ajudar o Maple a achar a integral, mas você pode nunca precisar delas. O Maple é bom em achar integrais que aparecem em cursos de cálculo introdutório.

Mudança de Variável.

Você pode usar a ajuda do Maple para checar o seu trabalho enquanto você aprende as técnicas iniciais de integração. Muitas vezes é interessante checar a solução passo a passo. Digamos que você quer encontrar a integral de

```
>q := x*sqrt(1 - x^2);
```

$$q := x\sqrt{1-x^2}$$

Se você pedir ao Maple a integral desta função, você obterá uma resposta direta:

```
>Int(q, x) = int(q, x);
```

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$$

Isto é ótimo desde que você queira apenas o resultado final. Mas e se você quiser aplicar um método de integração, assim como a mudança de variável? O pacote student tem um comando que pode ajudá-lo chamado *changevar*. O comando tem três parâmetros. O primeiro é uma equação especificando que deve ser feita a substituição da variável antiga em termos da nova variável. O segundo parâmetro é a integral onde a substituição vai acontecer.

O último parâmetro é a variável da integração, ou seja, é a nova variável.
Aqui está um exemplo de seu uso:

>n := changevar(sqrt(1 - x^2) = u, Int(q, x), u);

$$n := \int -u^2 du$$

A integral se transformou em algo simples o bastante para ser resolvido de cabeça. A integral em termos da nova variável, é

>n1 := value(n);

$$n1 := -\frac{1}{3}u^3$$

Esta não é a resposta final, pois queremos a integral nos termos da variável anterior. O comando *subs* fornece a resposta final.

>subs(u=sqrt(1-x^2), n1);

$$-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$$

Este é o mesmo resultado que foi obtido pela integração direta.

Sua vez: Você pode estar imaginando em como fazer a escolha para a fórmula de substituição. Novamente, a resposta é que existe uma porção de criatividade envolvida. Pegue um grupo de termos (uma sub-expressão) que pareça interessante ou que tenha uma transformação que você reconheça. Se você terminar com uma integral mais complicada, você verá que fez a escolha errada – tente de novo. Aqui estão outras duas possibilidades. Escreva a integral transformada em cada caso.

(a) $u = 1 - x^2$. Resposta: A integral em termos de u, é _____

(b) $u = \cos(x)$ Resposta: A integral em termos de u, é _____

(c) Qual a substituição útil? Resposta: _____

Integração por Partes

A fórmula para a integração por partes é derivada da regra de produto da diferenciação. Não vamos reproduzir uma derivação, mas apenas afirmar o resultado.

>Int(u, v) = u*v - Int(v, u);

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Esta técnica é melhor explicada com um exemplo. Digamos que temos que achar

>r := Int(x*ln(x), x);

1. As grandezas de interesse são u, du e v. Faça uma tabela contendo estas quantidades como esta.

u =	dv =
du =	v =

2. Escolha a expressão que você quer usar para dv. Seja lá o que você escolher tem que ser fácil de se integrar. A quantidade u é qualquer fator ou fatores restantes uma vez que dv for escolhido. Digite as expressões de u e dv na tabela abaixo. Neste exemplo, as escolhas de u e dv podem ser $u = \ln(x)$ e $dv = x$.

$u = \ln(x)$	$dv = x \, dx$
du =	v =

3. O diferencial du é achado quando determinamos $\ln(x)$. O correspondente de v é achado quando integramos o diferencial dv. A tabela completa é mostrada na tabela 5.3.

$u = \ln(x)$	$dv = x \, dx$
$du = (1/x) \, dx$	$v = x^2 / 2$

4. Todos os termos em $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ agora estão especificados, para que a integral original seja transformada em $\int x \ln(x) \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2} x \, dx$.

5. A integral restante, no lado direito é simples, logo o resultado final é

$$\int x \ln(x) \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2$$

6. O resultado do passo 5 é a integral indefinida. Uma constante arbitrária pode ser adicionada ao lado direito, que vai resultar na integral indefinida também. Lembre-se: a integral indefinida, ou anti-derivada, é a função cuja derivada produz um integrando.

Uma escolha errada em dv pode tornar o problema mais difícil ao invés de mais fácil. Em outros casos o problema pode parecer ficar mais difícil mas, acaba sendo a melhor forma para a resolução. É necessário um pouco de experiência antes que você se sinta confortável com esta técnica. Nosso próximo exemplo mostra o que acontece quando não fazemos a escolha adequada.

Exemplo 5-5: Integração por Partes de $x \cdot \ln(x)$, Escolhendo $dv = \ln(x)$

Use o método de integração por partes em $\int x \ln(x) dx$, escolhendo $dv = \ln(x)$

Resolução: O pacote `student` do Maple contém os comandos que ajudam a resolver os cálculos quase passo a passo. Este problema requer os comandos `intparts` e `isolate`. Seguiremos os passos anteriores, mas desta vez vamos escolher $u = x$. O comando `intparts` requer a integral como seu primeiro parâmetro e a função u como segundo parâmetro. O próximo comando constrói uma equação cujo lado esquerdo é a integral não avaliada e o lado direito é o comando `intparts`. Damos o nome p à equação como referencia.

```
>p := Int(x*ln(x), x) = intparts(Int(x*ln(x), x), x);
```

$$p := \int x \ln(x) dx = x(x \ln(x) - x) - \int x \ln(x) - x dx$$

A integral na direita pode ser expandida.

```
>p1 := expand(p);
```

$$p1 := \int x \ln(x) dx = x^2 \ln(x) - x^2 - \int x \ln(x) dx + \int x dx$$

Nossa escolha para u como x ao invés de $\ln(x)$ resulta na integral que estávamos procurando, tanto no lado direito quanto no lado esquerdo da equação. Não é difícil de se lidar com este tipo de situação. É similar à equação $x = a - b - x + c$, e você pode resolver em termos de x . Da mesma maneira, podemos isolar a integral que estamos tentando avaliar no lado esquerdo usando `isolate`.

```
>p2 := isolate(p1, Int(x*ln(x), x));
```

$$p2 := \int x \ln(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \int x dx$$

O lado esquerdo contém uma integral, mas é bem simples e pode ser avaliada facilmente. Até com a escolha mais “pobre” da função u , a integração por partes produziu uma solução. O comando `value` é usado para reduzir o lado direito a uma expressão que não contém o sinal de integral.

>lhs(p2) = value(rhs(p2));

$$\int x \ln(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2$$

A resposta é a mesma de quando escolhemos $u = \ln(x)$.

Sua vez: Ache a integral de $x^2 \ln(x)$ usando a integração por partes.

Resposta: _____

Substituições Trigonômétricas

O método de substituição trigonométrica é uma caso especial de uma mudança de variável. O comando *changevar* é usado neste momento, assim como para as outras substituições.

Exemplo 5-6: A integral de $\frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$

Ache a integral por meios de substituição trigonométrica

Resolução: O truque aqui é reconhecer a forma $25-x^2$ como similar a $1-\sin^2(q)$. A substituição necessária é $x = 5 \sin(q)$. Vamos começar nomeando a integral de c .

>c := Int(x^2/sqrt(25-x^2), x);

$$c := \int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx$$

Então fazemos a mudança da variável baseados na equação $x = 5 \sin(q)$:

>c := changevar(x = 5*sin(theta), c, theta);

$$c := \int 125 \frac{\sin(q)^2 \cos(q)}{\sqrt{25-25\sin(q)^2}} dx$$

Veja primeiramente que mudamos o significado do nome c . Isto é possível. O lado direito da afirmação é avaliado usando o antigo valor de c , e o resultado recebe o mesmo nome. Logo, o nome c foi redefinido. Agora, a pergunta a ser feita é se a integral foi simplificada pela substituição.

O valor no radical pode ser simplificado. Existe uma fator comum, 25 e $1-\sin^2(q)$. $= \cos^2(q)$. Emita o comando de simplificação usando o parâmetro *symbolic*.

>c := simplify(c, symbolic);

$$c := 25 \int -\cos(q)^2 + 1 dq$$

A substituição ajudou? Agora precisamos da integral de $\cos^2(q)$. Usando a fórmula de dois ângulos para $\cos^2(q)$, faremos a próxima substituição:

>c := subs(cos(theta)^2 = 1/2*1 + cos(2*theta), c);

$$c := 25 \int \frac{1}{2} - \cos(2q) dq$$

Finalmente temos uma integral fácil de avaliar. O resultado é

>c1 := value(c);

$$c1 := \frac{25}{2}q - \frac{25}{4}\sin(2q)$$

E então substituímos theta.

>c2 := Int(x^2/sqrt(25-x^2), x) = subs(theta = arcsin(x/5), c1);

$$c2 := \int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx = \frac{25}{2} \arcsin\left(\frac{1}{5}x\right) - \frac{25}{4} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{1}{5}x\right)\right)$$

Compare esta resposta com a integração direta do Maple.

>c4 := int(x^2/sqrt(25-x^2), x);

$$c4 := -\frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} - \frac{25}{2} \arcsin\left(\frac{1}{5}x\right)$$

Como foi dito, estes dois resultados parecem diferentes mas são iguais.

Sua vez: Cheque se os resultados são iguais plotando as duas integrais indefinidas no intervalo $x = 0 \dots 5$. Você vê um ou dois gráficos? Adicione 0.2 a uma das expressões e plote as duas novamente. Quantas linhas você vê agora?

Voltaremos a esta questão de verificar nossos resultados um pouco mais à frente, “Checando integrais do Maple”.

Aproximações Numéricas

Existem dois casos a serem considerados quando falamos de aproximações numéricas. No primeiro, trabalhamos a integral como uma fórmula. Tudo que precisamos neste caso é

saber os limites de integração. Usando o exemplo 5-6, se quisermos encontrar a área abaixo da curva $y = x^2 / \sqrt{(25 - x^2)}$ entre os valores $x = 1$ e $x = 5$, o comando é simplesmente

```
>evalf(subsx = 5, rhs(c2))-subs(x = 1, rhs(c2)));
```

19.56746982

Verificando nosso trabalho da ultima sessão, vamos avaliar a área usando a expressão diretamente integrada:

```
>evalf(int(x^2/sqrt(25-x^2)), x = 1 .. 5));
```

19.56746982

Os resultados são iguais. Nos encontramos a área abaixo da curva para 10 casas decimais, e verificamos nosso trabalho resolvendo o problema em duas maneiras diferentes e tendo o mesmo resultado.

O próximo caso envolve as situações onde o Maple não consegue achar a fórmula da integral. Se você tentar integrar a função $\sin(\sin(x))$ para $x = 0 .. 1$, O Maple simplesmente repete a questão.

```
>c := int(sin(x)), x = 0.. 1);
```

$$c := \int_0^1 \sin(\sin(x)) dx$$

Tudo que você tem a fazer neste caso é avaliar o resultado usando evalf.

```
>evalf(c);
```

.4306061031

Ou, você pode resolver o problema de forma que não precise saber se o Maple pode achar uma antiderivada.

```
>evalf(int(cos(cos(x)), x = 0 .. 1));
```

.6597810536

Isto é tudo a ser dito a respeito da integração numérica de funções simples no Maple! Você está usando as rotinas de integração numérica do Maple para que não precise saber os detalhes do trabalho numérico.

Checando as Integrais do Maple

Geralmente duas maneiras diferentes de resolver problemas de integração, aparentemente vão te dar resultados diferentes. Você pode verificar a resposta tirando sua derivada, mas também pode não parecer com o integrando. A melhor maneira de fazer uma verificação

rápida é plotando as duas funções. Se você escolher um intervalo representativo e plotar as duas funções no mesmo gráfico, você deveria ver apenas uma linha, pois elas são sobrepostas.

Então, empurre uma das linhas para cima adicionando um pequeno valor à função. A quantidade a ser somada depende da escala do eixo y. Deve ser apenas o suficiente para fazer a distinção. Se você realmente ver as duas linhas separadas no novo gráfico, pode ter certeza de que suas respostas estão pelo menos bem próximas, e provavelmente exatamente iguais.

Se você realmente quiser provar que as duas formas de uma integral são iguais, geralmente a persistência será recompensada. Você provavelmente já está convencido de que as duas fórmulas para integrais do exemplo 5-6 na sessão de substituição trigonométrica são idênticas, mas como fazemos o Maple confirmar isto? Um bom método é subtrair as duas expressões. Se elas forem verdadeiramente iguais o resultado após a simplificação será zero.

De volta ao exemplo 5-6 e aceitando que as definições de c2 e c4 ainda estão validas,

```
>ex := simplify(rhs(c2) - c4, symbolic);
```

$$\text{ex} := -\frac{25}{4} \sin\left(2\arcsin\left(\frac{1}{5}x\right)\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}$$

O resultado é um tanto decepcionante, deveria ser zero, porém recebemos um complicado termo trigonométrico contendo seno de um arco-seno. O cominho a frente consiste em reconhecer que $\arcsin(x/5)$ é um ângulo. A fórmula diz para pegar duas vezes o seno deste ângulo, em outras palavras precisamos de $\sin(2q)$. Talvez seja uma boa idéia mandar o Maple expandir a expressão.

```
>expand(ex, trig);
```

0

É isso aí, As duas formas de integração mostraram ser idênticas, pois sua diferença é zero. É importante compreender que a integral é a área abaixo da curva, e deixe o Maple tentar achar a antiderivada. Se não for possível vai ser necessário um pouco mais de trabalho.

Exercícios De Papel e Lápis

PP5-1

Você precisa se familiarizar com as formulas padrão para antiderivadas. Também você precisa praticar a aplicação destas fórmulas para exemplos simples. Para ajuda-lo no processo de compreender a integração básica, resolva os seguintes problemas de cabeça. Talvez você tenha que anotar alguns passos intermediários, mas você deve ser capaz de

resolver a maior parte destes problemas sem escrita. Sempre combine a variável da integração com o diferencial. Se um símbolo for diferente do diferencial, aceite como uma constante que pode ser fatorada fora da integral.

Geralmente podemos aplicar as fórmulas básicas da antiderivada apenas depois de “re-organizar os termos, para que a expressão possa ser reformulada no padrão. Mesmo que o Maple não o faça, você deve incluir a constante arbitrária de integração em suas respostas.

(a) $\int 3p dp$ Resposta: _____

(b) $\int 3p dx$ Resposta: _____

(c) $\int 3x^2 dx$ Resposta: _____

(d) $\int \frac{1}{4} x^3 dx$ Resposta: _____

(e) $\int 2\sin(q) dq$ Resposta: _____

(f) $\int 2\sin(q) dx$ Resposta: _____

(g) $\int 6\cos(x) dx$ Resposta: _____

(h) $\int \frac{10}{x} dx$ Resposta: _____

(i) $\int \frac{10}{x} + 10 dx$ Resposta: _____

(j) $\int 1 + x + x^2 dx$ Resposta: _____

(k) $\int \frac{x + 2x + 3x}{3} dx$ Resposta: _____

PP5-2

Continue praticando, desta vez resolvendo as integrais definidas.

(a) $\int_{-5}^5 5 dx$ Resposta: _____

(b) $\int_{-5}^5 -5 dx$ Resposta: _____

(c) $\int_0^5 5 - x dx$ Resposta: _____

$$(d) \int_0^{10} 5 - x dx$$

Resposta: _____

$$(e) \int_0^p \sin(q) dq$$

Resposta: _____

$$(f) \int_{-p}^p \sin(q) dq$$

Resposta: _____

$$(g) \int_0^{\frac{1}{2}p} \cos(q) dq$$

Resposta: _____

$$(h) \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} \cos(q) dq$$

Resposta: _____

$$(i) \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

Resposta: _____

$$(j) \int_1^{10e} \frac{1}{x} dx$$

Resposta: _____

$$(k) \int_1^2 \cos(q) dq$$

Resposta: _____

$$(l) \int_{\frac{1}{2}p-x}^{\frac{1}{2}p+x} \cos(q) dq$$

Resposta: _____

Maple Lab

Nota: Antes de resolver qualquer dos problemas neste laboratório, carregue o pacote student emitindo o seguinte comando. Alguns dos comandos utilizados fazem parte deste pacote.

>with(student):

ML5-1: Comparando Estimativas da Área Abaixo da Curva

Você viu no início deste capítulo que a área abaixo da curva pode ser aproximada por retângulos. A precisão da estimativa depende de quantos retângulos são escolhidos e como a altura dos retângulos é determinada. No Maple você tem três alturas para escolher

Os comandos que determinam o posicionamento dos retângulos são *leftbox*, *middlebox* e *rightbox*. Os três comandos correspondentes para calcular a área total dos retângulos são *leftsum*, *middlesum* e *rightsum*.

Dada a função, $f(x)$, a área abaixo da curva pode ou não existir. Se existir, então todos os três métodos de encontrar a área vão convergir para o mesmo resultado a medida que o número de retângulos se aproxima do infinito.

Você vai investigar qual método fornece o resultado mais preciso para um dado número de retângulos.

(a) Que a curva seja definida pela expressão $y := \frac{19x(1-x)}{50}$.

- (i) Plote a curva de $x = 0$ até $x = 1$ e observe seu formato. Você vai investigar a área acima do eixo x .
- (ii) Escolha 20 retângulos e plote a área aproximada abaixo da curva usando os três comandos “box”. Por exemplo, o comando *middlebox* é

>y := 19/50*x*(1-x);

$$y := \frac{19}{50} x(x-1)$$

>middlebox(y, x = 0 ..1, 20, thickness=0, color=black);

>(middlesum(y, x = 0 .. 1, 20));

$$\frac{1}{20} \left(\sum_{i=0}^{19} \left(\frac{19}{50} \left(\frac{1}{20} i + \frac{1}{40} \right) \left(\frac{39}{40} - \frac{1}{20} i \right) \right) \right)$$

Examine os três resultados. Qual deles parece que vai fornecer a estimativa mais precisa da área?

Resposta: _____

(iii) Compute os comandos “sum” correspondentes. Por exemplo, o comando *leftsum* é

>leftsum(y, x = 0 .. 1, 20);

Grave as três respostas

Resposta: _____

(iv) Mude o número de retângulos para 200 e repita os cálculos da soma. Examine os resultados e compare-os com (iii). Converta os números para a forma decimal e adivinhe a área.

Resposta: _____

(v) Escolha qualquer um dos comando “sum” e forme o limite quando o número de retângulos se aproxima do infinito. Grave seu resultado como fração.

Resposta: _____

(vi) Converta sua resposta para um número decimal. Sua estimativa em (iv) estava correta?

Resposta: _____

(b) Repita os passos em ML5-1 para estimar a área abaixo da função seno de $x = 0$ a $x = \pi$. Escolha 20 retângulos, e depois 21 retângulos. A sua expectativa por aumentar um retângulo deve ser que a estimativa da área melhore. É isto que acontece?

Resposta: _____

(c) Que mudanças você faria para lidar com esta função? Desde que `middlesum` e os comando relacionados requerem expressões, você mudaria alguma função para expressão. Neste problema vamos mostrar como lidar com uma função que é descrita por diferentes expressões para diferentes domínios de x . A função *piecewise* do Maple foi feita para ajuda-lo nesta tarefa. Ela permite que você defina uma função descrita por diferentes expressões para diferentes domínios de x . Que a função seja

$f := x \rightarrow \text{piecewise}(x \geq 0 \text{ and } x < 1/2, x, x \geq 1/2 \text{ and } x < 1, 1-x);$

$$f := x \rightarrow \text{piecewise}\left(0 \leq x \text{ and } x < \frac{1}{2}, x, \frac{1}{2} \leq x \text{ and } x < 1, 1-x\right)$$

O comando acima é equivalente à afirmação $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq 1/2$, e $f(x) = 1-x$ para $1/2 \leq x \leq 1$.

(i) Plote a função de $x = -1$ a $x = 2$. Você tem um gráfico mesmo que a função não seja definida fora do intervalo $0 \leq x \leq 1$?

Resposta: _____

(ii) Use um dos comandos “Box” para construir 10 retângulos abaixo da curva de $x = 0$ a $x = 1$.

Resposta: _____

(iii) Use o comando “sum” correspondente para estimar área da função.

Resposta: _____

(iv) A figura contém apenas linhas retas. Calcule a área usando geometria (ou trigonometria). É a mesma que você achou em (iii)?

Explique: _____

ML5-2:A Integral Definida

Lembre-se que se $f(x)$ for negativo para $x = a \dots b$, então a integral $\int_a^b f(x)dx$ também é negativa. Isto explica porque a integral de $x - 1$ de $x = 0$ a $x = 2$ é 0: $\int_0^2 x - 1 dx = 0$. Confirme se o Maple dá esta resposta emitindo o comando `>int(x - 1, x = 0 .. 2);`. O resultado diz que a área entre a linha e o eixo x de $x = 0$ até $x = 1$ é igual a área entre o eixo x e a linha para $x = 1$ até $x = 2$. Vamos estender estas idéias em formas mais complicadas nos seguintes exemplos.

(a) Ache o menor positivo, diferente de zero, de x onde $\int_0^x \cos(q) dq = 0$.

Resposta: _____

Você poderia verificar o resultado usando um argumento baseado na trigonometria, sem ter que realizar nenhum cálculo?

(b) Ache o menor valor positivo diferente de zero para x sendo $\int_1^x 3 + t - t^2 dt = 0$.

Resposta: _____

(c) Ache o valor de x onde $\int_{-x}^x \sin(q) dq = 0$.

Resposta: _____

ML5-3

Como você demonstraria que o Maple sabe do teorema fundamental do cálculo?

(a) Que comando você usaria para diferenciar a integral de uma função arbitrária?

Resposta: _____

(b) O que acontece se você integrar a derivada de uma função arbitrária? É o mesmo que (a)? Se não, explique a diferença.

Resposta: _____

(c) Perceba que o resultado em (b) acontece toda vez que pedimos ao Maple para integrar uma expressão para qual ele já sabe a resposta. Em, geral existe uma constante de integração que o Maple espera que você digite. Esta constante pode ser determinada se você souber alguma coisa a respeito da integral. Use o fato que a velocidade $v(0) = 20$ metros por segundo (m/s) em $t = 0$, para achar a fórmula da velocidade de um objeto, sabendo que sua aceleração é dada por $a = 100t - t^2$, de $t = 0$ até $t = 10$ s.

Resposta: _____

ML5-4

Ache a área de um círculo por integração. A fórmula do círculo de raio r centrado na origem é $x^2 + y^2 = r^2$.

(a) Resolva esta equação em y para que produza a expressão para um quarto do círculo no primeiro quadrante. Dê a esta expressão o nome y . O círculo exibe um alto grau de simetria. Certamente, os eixos x e y dividem o círculo em 4 partes iguais. Demonstre o comando para encontrar a área deste quarto do círculo.

Resposta: _____

(b) Faça com que o Maple realize a integração e informe o resultado.

Resposta: _____

(c) Qual a área do círculo completo? Use o símbolo A para a área completa.

Resposta: _____

(d) A este ponto, o Maple lhe deu a resposta de um problema de integração que provavelmente você não conseguiria fazer com papel e lápis. Liste alguma maneiras de como você confirmaria esta resposta – Demonstrando que você já aprendeu esta fórmula no passado!

Resposta: _____

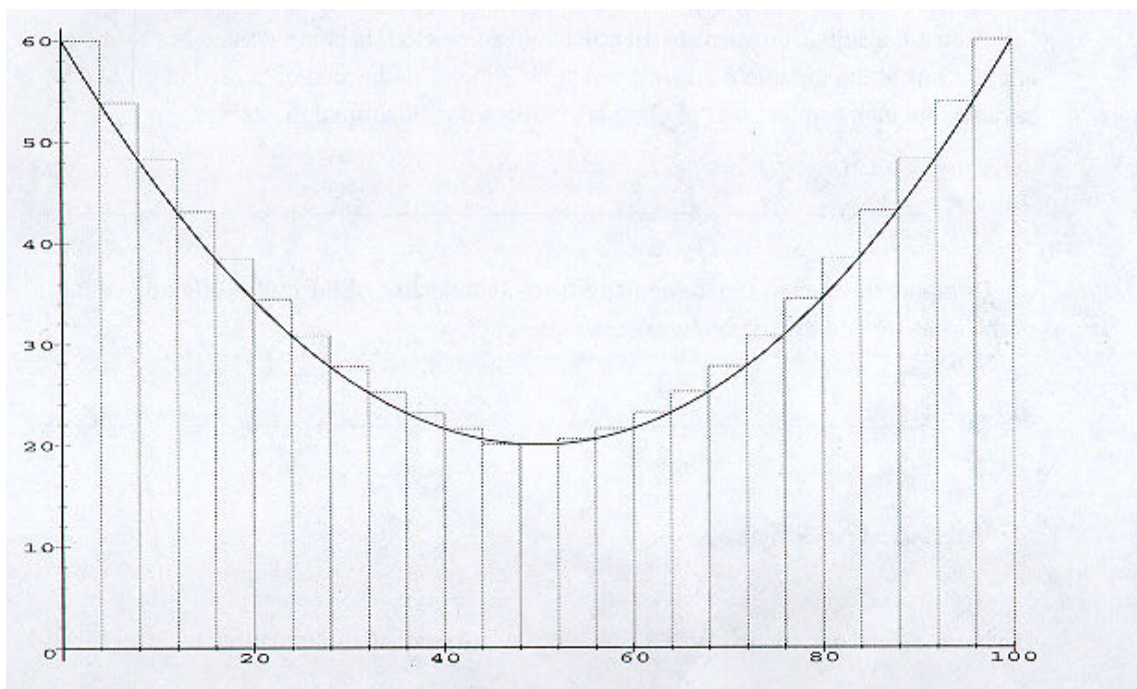


Figura 5.10 Bandeiras penduradas nos cabos de uma ponte suspensa até a estrada.

ML5-5

Projetistas resolveram pendurar bandeiras nos cabos que sustentam uma ponte que atravessa o rio que passa pelo centro da cidade. Eles querem cobrir completamente um dos lados da ponte como se fosse uma cortina. O diagrama na Figura 2.10 dá uma idéia do que eles querem fazer.

O material para as bandeiras é vendido num rolo de 4 pés de largura. Todas as bandeiras vão estar estendidas da estrada até os cabos, que é um arco parabólico. Uma ponta da bandeira apenas toca o arco e o excesso triangular vai ser enrolado em volta do cabo de forma que fique preso.

(a) Se uma ponta da bandeira apenas toca o arco, como é mostrado na Figura 5.10, quantos pés de tecido vamos precisar? (o rolo tem a largura de 4 pés, encontre o comprimento total.).

Resposta: _____

(b) A pessoa encarregada dos custos faz uma objeção: Parte do tecido está sendo desperdiçada por causa do excesso triangular que está sendo enrolado no cabo, ao invés de ser cortado e guardado para outra atividade. Quantos pés quadrados de tecido estão sendo enrolados no cabo?

Resposta: _____

(c) Compare a área dos pedaços triangulares à área total de tecido. Qual a porcentagem da área total os pedaços representam?

Resposta: _____

ML5-6: A ellipse

Derive a fórmula para a área de uma elipse, dado que a equação para uma elipse é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(a) Plote a relação, dado $a = 5$ e $b = 4$. Do gráfico determine a interpretação das constantes a e b . *Dica:* use `plots[implicit]` para plotar a relação.

(b) Resolva a equação para y . Existem duas soluções, uma para a parte da elipse acima do eixo x , e outra para a parte abaixo.

Ache a área no primeiro quadrante por integração. Quais são os limites para x ? Cuidado! Se você cometer um erro nos limites de integração, sua resposta não terá sentido. Você pode usar um argumento de simetria para mostrar que a área da elipse é quatro vezes esta área? Alternativamente, você poderia achar a área de cada um dos quatro pedaços por integração e soma-las, lembrando de mudar os sinais das áreas dos pedaços abaixo do eixo x para fazê-los positivos.

(c) Calcule a área da elipse dada por $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ usando o comando `middlesum`.

Compare suas respostas com π .